Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών

1. Αν α,β,γ μη μηδενικοί αριθμοί και $\alpha^5\beta^4\gamma^3 \neq 1$ τότε η παράσταση $\dfrac{\alpha^8\beta^6\gamma^4 - \alpha^3\beta^2\gamma}{\alpha^{10}\beta^8\gamma^6 - \alpha^5\beta^4\gamma^3}$ ισούται με:

1	
αβγ	
$\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$	X
$\dfrac{1}{\alpha^3\beta^2\gamma}$	

2. Η εξίσωση $x^2 - x + 2014 = 0$:

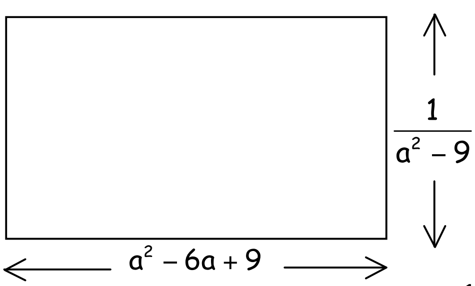
Έχει μοναδική πραγματική ρίζα	
Έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες	
Έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες	
Είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς	X

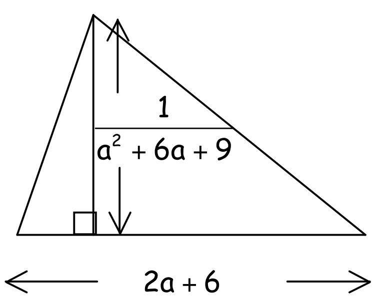
3. Αν

$$\Pi = \frac{(-1)^3}{1^3} + \frac{(-2)^3}{2^3} + \frac{(-3)^3}{3^3} + ... + \frac{(-98)^3}{98^3} + \frac{(-99)^3}{99^3} + \frac{(-100)^3}{100^3}$$, τότε:

Π=-100	X
Π=100	
Π=1	
Π=-1	

4. Αν θεωρήσουμε E_1 το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και E_2 το εμβαδό του τριγώνου, με α > 3,





τότε ο λόγος $\frac{E_1}{E_2}$ είναι ίσος με:

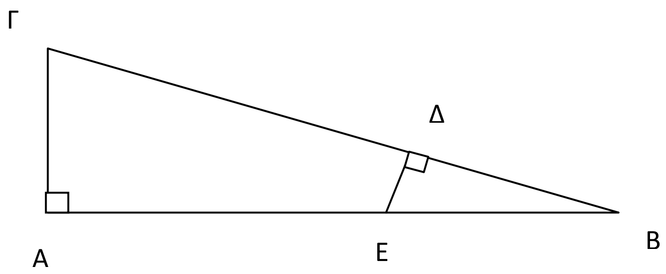
$\frac{\alpha-3}{\alpha+3}$	
$\left(\frac{\alpha-3}{\alpha+3}\right)^2$	
α-3	X
$\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-3}\right)^2$	

5. Δίνεται η εξίσωση (Ι) : $x^2 - 6x + 9 = 0$ και το σύστημα

$(\Sigma)\begin{cases} x + 2y = 4\lambda - 9 \\ 3x + (\lambda^2 - 3)y = 12 \end{cases}$. Αν το λ είναι η λύση της εξίσωσης (Ι), τότε το σύστημα (Σ):

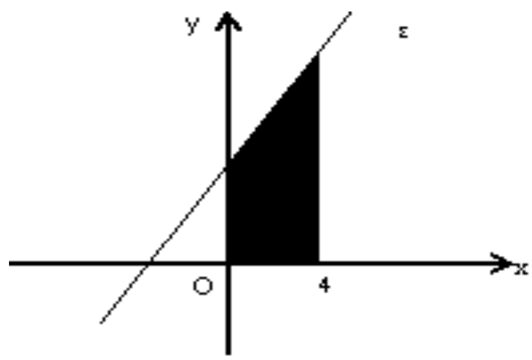
είναι αδύνατο	X
έχει μοναδική λύση	
έχει άπειρες λύσεις	
έχει λύση τη (x,y)=(0,1)	

6. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 12, ΒΓ = 15 και ΓΔ = 11. Η ΔΕ ισούται με:



9	
5	
4	
3	X

7. Δίνεται η ευθεία ε: y = 2x + α (α>0). Αν το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου είναι 36 cm^2, τότε:



α = 5	X
α = 10	
α = 15	
α = 25	

8. Αν (x_o, y_o) οι συντεταγμένες του σημείου Α για τις οποίες ισχύει

$x_o^2 + y_o^2 = 2y_o - 4x_o - 5$, τότε το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y = 2x + 5$	X
$y = \frac{1}{x}$	
$y = 2$	
$y = x^2 + 1$	

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΔ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ, ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α. Δείξτε ότι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$

β. Δείξτε ότι ΑΔ=ΑΕ

γ. Δείξτε ότι τα σημεία Β και Γ ισαπέχουν από τις πλευρές ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

<u>Υπόδειξη λύσης:</u>

α. Ίσες ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Από κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα.

γ. Φέρνουμε $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΚΒ και ΓΛΕ.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^2 + (2a-1)x - 6$.

Αν ισχύει ότι P(3) = 6,

Α. Να υπολογίσετε το α.

Β. Αν α = 1:

i. να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

ii. να αποδείξετε ότι P(x) = (x-2)(x+3).

iii. να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{4-x^2} = -2$.

iv. να λυθεί η εξίσωση $P(x^2-2)=0$.

<u>Υπόδειξη λύσης:</u>

Α. Αν αντικαταστήσουμε στο P(x) όπου x=3 και με δεδομένο P(3) = 6, λύνουμε την εξίσωση του προκύπτει.

Β. i. Είναι $P(x) = x^2 + x - 6$. Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση βρίσκουμε ότι x = -3 ή x = 2.

ii. Από τον τύπο παραγοντοποίησης τριωνύμου.

iii. Περιορισμοί: $x \neq 2$ και $x \neq -2$

$$\frac{P(x)}{4-x^2} = -2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)(x+2)} = -2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+2} = 2 \Leftrightarrow \ldots x = -1 \text{ ΔΕΚΤΗ}$$

iv. Από ερώτημα (ii) , αντικαθιστώ όπου x το $x^2 - 2$ και προκύπτει η εξίσωση $(x^2-4)(x^2+1) = 0$ με λύσεις $x = -2$ και $x = -2$

Βαθμολογία: Ασκήσεις 1-4: 5x4 = 20 Μονάδες
Ασκήσεις 4-8: 10x4 = 40 Μονάδες
Ασκήσεις 9, 10: 20x2 = 40 Μονάδες